

Exercices – Séquence n° 14 – COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

Contenus	- Ensemble fini, partie, couple, triplet, k-uplet (ou k-liste), produit cartésien de k ensembles, ensemble A^k des k-uplets d'un ensemble A. - Principe additif : nombre d'éléments d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints. - Principe multiplicatif : nombre d'éléments d'un produit cartésien. - Nombre de k-uplets d'un ensemble à k éléments. - Nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Lien avec les n-uplets de $\{0; 1\}$, les mots longueur n sur un alphabet à deux éléments, les chemins d'un arbre. - Nombre de k-uplets d'éléments distincts d'un ensemble à n éléments. Définition de $n!$. Nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments. - Combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments : parties à k éléments de l'ensemble. Représentation en termes de mots ou de chemins. - Pour $0 \leq k \leq n$, formules $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$. - Explication pour $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$. Symétrie. Relation et triangle de Pascal.
Capacités	- Dans le cadre d'un problème de dénombrement, utiliser une représentation adaptée (ensembles, arbres, tableaux, diagrammes) et reconnaître les objets à dénombrer. - Effectuer des dénombrements simples dans des situations issues de divers domaines scientifiques (informatique, génétique, théorie des jeux, probabilités, ...).

COMPÉTENCES :**Ch :** CHERCHER**Mo :** MODÉLISER**Re :** REPRÉSENTER**Ra :** RAISONNER**Ca :** CALCULER**Co :** COMMUNIQUER

Ensembles finis, nombre d'éléments de E^k , nombre de parties d'un ensemble

Exercice 1 [Re-Ca]

On s'intéresse aux défauts de freinage et d'éclairage de 500 véhicules d'un réseau d'entreprises. Parmi eux, 65 ont un défaut de freinage, 150 un défaut d'éclairage et 50 présentent les deux défauts.

- Représenter cette situation par un diagramme de Venn.
- Déterminer le nombre de véhicules ne présentant aucun des deux défauts.

Exercice 2 [Re-Ra-Ca]

On note M la spécialité de Mathématiques, SP celles de Sciences-Physiques et NSI celle de Numérique et Sciences informatiques. Les 36 élèves d'une classe de Seconde choisissent leurs spécialités de Première : 13 ont choisi M, 10 SP et 7 NSI. De plus, 6 élèves ont choisi M et SP, 2 M et NSI et 3 SP et NSI. Enfin 2 élèves ont pris ces 3 spécialités.

Combien d'élèves n'ont pris aucune de ces trois spécialités ?

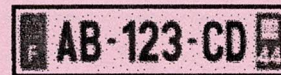
Exercice 3 [Ca]

Une association doit élire trois membres de son bureau (président, secrétaire et trésorier) parmi sept candidats. Une même personne ne peut pas cumuler les postes. Combien de bureaux différents peuvent être élus ?

Exercice 4 [Ca]

La plaque d'immatriculation d'un véhicule peut être assimilée à un 7 –uplet. Elle comporte :

- deux lettres distinctes de O, I et U pour ne pas confondre avec 0, 1 et V ; les deux blocs SS et WW étant exclus
- suivies de trois chiffres entre 0 et 9 à l'exception du triple zéro : 000
- suivis de deux lettres distinctes de O, I et U ; le bloc SS étant exclu.



Déterminer le nombre de plaques d'immatriculation différentes possibles.

Exercice 5 [Ca]

Soit l'ensemble $E = \{M; A; T; H; S\}$.

- 1) Déterminer un triplet d'éléments de E ainsi qu'un 6 –uplet d'éléments de E.
- 2) Combien de 5 –uplets d'éléments de E peut-on former ?
- 3) Combien d'éléments compte E^5 ?

Exercice 6 [Ca]

On colorie en rouge, vert ou bleu chaque case d'un quadrillage en comportant 30.

Déterminer le nombre de coloriages différents possibles.

Exercice 7 [Ca]

Dans un casino, à chaque manche d'un jeu, le gain peut être de -3€ , 1€ ou 5€ . Un client joue entre 0 et 3 manches.

- 1) Déterminer le nombre de parties de l'ensemble $E = \{-3; 1; 5\}$ puis les écrire.
- 2) En déduire les gains possibles du client.

Exercice 8 [Ca-Co]

E est l'ensemble $\{u; v; w; x; y; z\}$.

- 1) Déterminer le nombre de parties de E.
- 2) On fait correspondre chaque partie de E à un 6-uplet de l'ensemble $\{0; 1\}$.
À quel 6-uplet correspond la partie $\{u; w; z\}$?
- 3) A quelle partie de E correspond le 6-uplet $(1; 1; 1; 1; 1; 0)$?

Exercice 9 [Ca]

Lors d'une partie d'un jeu de société, le personnage sur le plateau doit procéder à sept déplacements successifs. Chaque déplacement correspond à une direction (gauche, droite, haut, bas). Combien de chemins différents le personnage peut-il alors emprunter sachant que les retours en arrière sont possibles ?

Exercice 10 [Ca-Ra]

Le morse est un système de codage utilisant deux signaux, le point • et le trait –.

Par exemple, – – • – – ••• signifie MATH ; on dit que cette séquence est de longueur 9.

- 1) Déterminer le nombre de séquences de longueur n où n est un entier naturel non nul.
- 2) Déterminer la valeur minimale de n afin de pouvoir coder chacune des vingt-six lettres de l'alphabet par des séquences de longueur n . Pour cette valeur de n , combien de séquences sont inutilisées ?
- 3) On se propose donc d'optimiser le choix des séquences.
 - a. Démontrer que le nombre de séquences de longueur au plus n ($n \in \mathbb{N}^*$) est égal à $2^{n+1} - 2$.
 - b. En déduire la valeur minimale de n afin de pouvoir coder chacune des vingt-six lettres de l'alphabet par des séquences de longueur au plus n .
 - c. Afin d'optimiser la taille des messages, on ne conserve que les plus courtes séquences.
Quel est le nombre de séquences de longueur 4 inutilisées ?

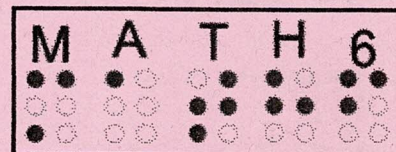
Exercice 11 [Ca]

Le braille est un système d'écriture tactile à points saillants. On représente chaque caractère braille par une grille composée de 6 points (sur deux colonnes) saillants ou non.

Sur les exemples ci-contre, les points saillants sont noirs.

Une grille sans point saillant représente un espace et non pas un caractère.

Déterminer le nombre de caractère braille que l'on peut former.

**Exercice 12** [Ra-Mo]

E est un ensemble à n éléments où n est un entier naturel.

- 1) Déterminer le nombre de parties de E .
- 2) Justifier qu'ajouter un nouvel élément à l'ensemble E , distinct des autres, revient à multiplier le nombre de ses parties par 2.
- 3) Henri voudrait connaître le plus petit nombre d'éléments N de l'ensemble E afin qu'il comprenne au moins m parties, où m est un entier naturel donné. La fonction Python Seuil ci-contre renvoie le nombre N cherché.
 - a. Compléter les lignes 5 et 6 de ce programme.
 - b. Si on exécute cette fonction pour $m = 10\,000$ on obtient $N = 14$ et pour $m = 1\,000\,000$ on obtient $N = 20$. Interpréter ces résultats.

```
1 from math import *
2 def Seuil(m):
3     N=0
4     nbparties=1
5     while :
6         nbparties=
7         N=N+1
8     return N
```

Exercice 13 [Ra]

En informatique, un caractère peut être une lettre minuscule ou majuscule, un chiffre, un espace, des guillemets... Le système de codage ASCII associe chaque caractère à un 7-uplet d'éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$.

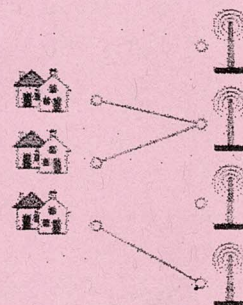
- 1) Le nombre de caractères utilisés par les anglophones est égal à 95. Ce codage est-il adapté ?
- 2) Les langues latines nécessitent 191 caractères. Déterminer la valeur minimale de l'entier naturel k telle que chaque caractère puisse être associé à un k -uplet d'éléments de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Exercice 14 [Ra]

Trois villages peuvent être rattachés à une des quatre antennes-relais du secteur.

Le schéma ci-contre représente une liaison possible entre les villages et les antennes.

Combien y a-t-il de liaisons possibles sachant que plusieurs villages peuvent être rattachés à la même antenne ?



k-uplets, permutations, combinaisons**Exercice 15** [Ra]

Une commerciale travaillant en Nouvelle-Aquitaine doit se rendre dans trois villes différentes parmi Bordeaux, Périgueux, La Rochelle, Pau et Bayonne. Combien de trajets différents peut-elle effectuer ?

Exercice 16 [Ra]

Écrire toutes les permutations de l'ensemble $\{a ; b ; c ; d\}$.

Exercice 17 [Ca]

1) Pour $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5\}$, calculer $n!$

2) Simplifier :

a. $\frac{6!}{3!}$

b. $\frac{9!}{11!}$

c. $\frac{20!}{13! \times 5! \times 2!}$

d. pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$

Exercice 18 [Ra-Co]

1) De combien de façons peut-on faire asseoir dix personnes sur une rangée de dix chaises ?

2) Ce nombre change-t-il si les chaises sont disposées en deux rangées de cinq ?

Exercice 19 [Ra-Co]

De combien de façons peut-on disposer huit personnes pour danser en cercle ?

Exercice 20 [Ra-Co]

On dispose de sept porte-manteaux. De combien de façons peut-on ranger sept manteaux sans les empiler ?

Exercice 21 [Mo-Co]

Un lycée propose dix spécialités aux élèves de première générale.

1) Combien y a-t-il de combinaisons possibles de trois spécialités pour un élève de première générale ?

2) Tristan a choisi la spécialité mathématiques mais hésite pour les deux autres entre SVT, NSI, physique-chimie et SES. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

Exercice 22 [Mo-Ca-Co]

On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 52 cartes.

1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?

2) Dénombrer les tirages qui comportent un as et un roi. En déduire la probabilité d'un tel tirage.

3) Une paire est un tirage constitué de deux cartes de même hauteur.

a. Combien y a-t-il de paires d'as ?

b. En déduire le nombre total de paires ainsi que la probabilité d'une paire.

4) Des événements A : « Tirer deux cartes de cœur » et B : « Tirer une paire », lequel est le plus probable ?

Exercice 23 [Ra-Co]

Après avoir précisé s'il s'agit de k –uplets, de permutations ou de combinaisons, dénombrer :

1. les rencontres de handball possibles lors d'un tournoi opposant 16 équipes ;
2. les classements (sans ex aequo) possibles à l'arrivée d'une course de 100 mètres de 8 athlètes ;
3. les mots de cinq lettres différentes que l'on peut former avec les 26 lettres de l'alphabet (qu'ils aient un sens ou non)

Exercice 24 [Ra]

Relier chacune des définitions suivantes au calcul qui lui correspond.

– Définitions –

Nombre de tirages de p objets parmi n ■

Nombre de tirages successifs avec remise de p objets parmi n ■

Nombre de tirages successifs sans remise de p objets parmi n ■

Nombre de tirages successifs sans remise de n objets parmi n ■

– Calculs –

■ $n!$

■ $\frac{n!}{(n-p)!}$

■ n^p

■ $\frac{n!}{p! (n-p)!}$

Exercice 25 [Ra-Co]

Lors d'une course hippique, on peut parier sur les cinq premiers chevaux à l'arrivée ; on parle alors de quinté. 15 chevaux sont au départ et chaque cheval est numéroté de 1 à 15. Combien y a-t-il de quintés différents :

- 1) en tenant compte de l'ordre ?
- 2) sans tenir compte de l'ordre ?

Exercice 26 [Mo-Ra-Co]

Soit la fonction Python Coefficients(n) suivante :

```
1 from math import *
2 def Coefficients(n):
3     L=[1,1]
4     M=L
5     for i in range (2,n+1):
6         M=M+[1]
7         for k in range(i-1):
8             M[k+1]=L[k+1]+L[k]
9         L=M
10    return L
```

i	k	L	M
		[1, 1]	[1, 1]
2		[1, 1]	[1, 1, 1]

- 1) Compléter le tableau ci-contre représentant l'exécution pas à pas de cette fonction lorsqu'on saisit, dans une console d'exécution Python : Coefficients(3)
- 2) Quel est le rôle de cette fonction ?
- 3) Que va renvoyer cette fonction si on saisit, dans une console d'exécution Python, Coefficients(10) ? Expliquer la démarche.

Exercice 27 [Ra-Co]

Une urne contient 100 jetons numérotés de 1 à 100. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

- 1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- 2) Quelle est la probabilité de tirer deux numéros pairs ?
- 3) Lequel des événements suivants est le plus probable :
A : « La somme des numéros est paire » et B : « La somme des numéros est impaire ».

Exercice 28 [Mo-Ra]

La fonction Python Combinaisons(L) ci-contre renvoie toutes les parties à deux éléments d'un ensemble fini à n éléments (avec $n \geq 2$) représenté par une liste L.

- 1) Compléter le tableau suivant représentant l'exécution pas à pas de cette fonction lorsque $L=[1,2,3,4]$

i	P[0]	k	P

```

1 from math import *
2 def Combinaisons(L):
3     n=len(L)
4     P=[0,0]
5     for i in range(1,n):
6         P[0]=L[i-1]
7         for k in range(i+1,n+1):
8             P[1]=L[k-1]
9             print(P)
10    return

```

- 2) Saisir cette fonction puis l'exécuter lorsque : $L=[1,2,3,4,5]$. Que renvoie-t-elle ?
- 3) Quelle(s) modification(s) apporter à cette fonction afin qu'elle génère les parties à 3 éléments d'un ensemble fini à n éléments (avec $n \geq 3$) ?

Exercice 29 [Ra-Co]

Lors d'un oral d'un concours, l'examineur propose aux candidats deux sujets choisis aléatoirement dans une banque publique de 80 sujets.

- 1) Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 2) Baptiste a préparé 10 de ces sujets. Déterminer le nombre de tirages possibles comportant au moins l'un des sujets révisés.
- 3) Combien de sujets, aurait-il dû préparer, pour qu'au moins 9 tirages sur 10 contiennent l'un des sujets révisés ?

Pour réviser

- Exercices d'application corrigées à la fin du manuel : 26, 29, 33, 38, 49 et 53 pages 348 à 351.
- Exercices « bilan » : 85, 86, 88, 89 et 90 page 354.